View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF ALGEBRA 120, 170–199 (1989)

Série de Hausdorff d'une algèbre de Lie et projections canoniques dans l'algèbre enveloppante

JACQUES HELMSTETTER

Institut Fourier, Université de Grenoble 1, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex. France

Communicated by J. Tits

Received April 1, 1987

1. LE PROBLÈME ET LES RÉSULTATS OBTENUS

Soit A une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique nulle (ou sur un anneau commutatif unifère contenant le corps des nombres rationnels); lorsqu'il sera question de série de Hausdorff, A sera une algèbre de Lie ordinaire; mais pour le problème des projections canoniques, on pourra aussi utiliser une algèbre de Lie graduée par la parité, $A = A^+ \oplus A^-$, ce qu'on appelle parfois une super-algèbre de Lie; A^+ est la sous-algèbre des éléments pairs, A^- le sous-espace des éléments impairs. Si a et b sont deux éléments homogènes (c'est-à-dire pairs ou impairs), je pose

$$\sigma(a, b) = 1 \qquad \text{si} \quad a \text{ ou } b \text{ est pair,}$$

$$\sigma(a, b) = -1 \qquad \text{si} \quad a \text{ et } b \text{ sont impairs;}$$

quand j'utiliserai un symbole σ, il sera toujours sous-entendu qu'il s'applique à deux éléments homogènes, mais pas nécessairement dans le même espace. Je rappelle que l'algèbre enveloppante UA est le quotient de l'algèbre tensorielle TA par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$a \otimes b - \sigma(a, b) \cdot b \otimes a - [a, b], \qquad \text{où } a \text{ et } b \in A.$$

Je note $U_0 A$ l'algèbre enveloppante de l'espace gradué $A = A^+ \oplus A^-$ muni du crochet nul; cette algèbre est isomorphe au produit tensoriel de l'algèbre symétrique SA^+ et de l'algèbre extérieure ΛA^-; on peut la munir d'une graduation sur le semi-groupe des entiers $\geqslant 0$: par définition $U_0^k A$ est le sous-espace engendré par les produits de k éléments de A. Il existe une bijection canonique J de $U_0 A$ sur UA; si $a_1, a_2, ..., a_k$ sont des éléments homogènes de A, alors

$$J(a_1 a_2 \cdots a_k) = \frac{1}{k!} \sum_w \operatorname{sgn}(a_w)\, a_{w(1)} a_{w(2)} \cdots a_{w(k)};$$

0021-8693/89 $3.00

Copyright © 1989 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

la sommation se fait sur toutes les permutations w des entiers $1, 2, ..., k$, et $\mathrm{sgn}(a_w)$ est le produit de tous les nombres $\sigma(a_{w(i)}, a_{w(j)})$ tels que $i<j$ et $w(i)>w(j)$; j'ajoute que $J(1)=1$. Par suite UA est la somme directe des sous-espaces

$$U^k A = J(U_0^k A);$$

par définition les projections canoniques dans UA sont les projections sur les sous-espaces $U^k A$.

Le problème posé est le suivant: on se donne des éléments homogènes $a_1, ..., a_m$ de A (en nombre $m \geqslant 1$) et une suite d'exposants $p_1, ..., p_m$ positifs ou nuls; on exige que $p_j \leqslant 1$ chaque fois que a_j est impair; on veut calculer les projections canoniques de

$$\frac{a_1^{p_1}}{p_1!}\frac{a_2^{p_2}}{p_2!}\cdots\cdots\frac{a_m^{p_m}}{p_m!};$$

cet élément sera désigné par l'abréviation $a^p/p!$. Voici deux raisons qui justifient le choix de ce problème. D'une part si $(a_1, ..., a_m)$ est une base de A, les monômes $a^p/p!$ forment une base de UA. D'autre part si A est une algèbre de Lie ordinaire (c'est-à-dire si $A=A^+$), le calcul de la projection canonique de $a^p/p!$ dans $U^1A=A$ est équivalent au calcul de la série de Hausdorff de A avec m variables; formellement cette série $H(a_1, a_2, ..., a_m)$ est définie ainsi:

$$H(a_1, ..., a_m) = \log((\exp a_1)(\exp a_2)\cdots(\exp a_m));$$

le second membre doit être calculé dans UA, et l'on sait que le résultat est une série formelle à valeurs dans A; on peut déduire de ce dernier fait le théorème suivant (signalé dans une remarque à la fin du § 6, no. 4 de [B]):

(1) THÉORÈME. *La partie de la série formelle $H(a_1, ..., a_m)$ qui est de degré p_j respectivement en chaque variable a_j, est la projection canonique de $a^p/p!$ dans A.*

Mon objectif initial était d'aboutir à un calcul plus explicite de la série de Hausdorff, en passant par le calcul des projections canoniques; ensuite M. Duflo m'a fait remarquer que ce problème de projections canoniques gardait un sens pour des algèbres de Lie graduées, et j'ai constaté qu'on ne compliquait pas beaucoup le problème en prenant une algèbre de Lie graduée, pourvu qu'on impose la condition $p_j \leqslant 1$ chaque fois que a_j est impair. C'est pourquoi je ne mentionnerai plus jamais la série de Hausdorff, sauf pour dire quelques mots du théorème (1), à la fin du § 2.

Evidemment il suffit de traiter le cas où tous les exposants p_j sont $\geqslant 1$. Le cas où tous ces exposants sont égaux à 1, a été résolu par L. Solomon;

son texte (voir référence [S]) ne contient pas d'allusion à la série de Hausdorff. Ici je retrouverai les résultats de Solomon par une méthode toute différente, basée sur le théorème (15) qui est le but essentiel du § 2 plus loin. Une conséquence immédiate de ce théorème (15) est le fait que toutes les projections canoniques P_k sur les sous-espaces U^kA sont connues dès que l'on connaît $P = P_1$, projection sur A; ceci était déjà expliqué (avec un autre langage) par Solomon. Pour expliquer moi-même ce fait, j'utilise la structure de cogèbre de UA; le coproduit C de UA est l'homomorphisme d'algèbres de UA dans $UA \otimes UA$ (produit tensoriel gradué) tel que $C(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ pour tout $a \in A$; je signale que $J(U_0 A \to UA)$ est un isomorphisme de cogèbres (corollaire (17) plus loin); en fait, pour calculer P_k j'ai besoin du k-ième itéré du coproduit; ceci est l'homomorphisme C_k de l'algèbre UA dans l'algèbre $T^k(UA) = UA \otimes UA \otimes \cdots \otimes UA$ (produit tensoriel gradué) tel que, pour tout $a \in A$,

$$C_k(a) = a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots \cdots$$
$$\cdots \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a.$$

(2) THÉORÈME. *Pour tout entier $k \geqslant 0$, notons $T_U^k P$ l'application de $T^k(UA)$ dans UA telle que*

$$T_U^k P(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdots P(x_k)$$

si $x_1, ..., x_k \in UA$. On peut écrire

$$P_k = \frac{1}{k!} (T_U^k P) \circ C_k.$$

Si $k = 0$, $T_U^0 P$ est l'injection $K \to UA$, et C_0 est la projection $UA \to K$ (aussi appelée co-unité). Lorsque $k \geqslant 1$, il faut se souvenir que $P(1) = 0$; donc si $U'A$ désigne l'idéal engendré par A dans UA, pour le calcul de $P_k(x)$, seule importe la projection de $C_k(x)$ dans $T^k(U'A)$. Dans la suite, j'étudierai seulement la projection $P = P_1$, et je ne parlerai des autres projections P_k que pour démontrer le théorème (2), à la fin du § 2.

Je suppose que certains lecteurs voudront connaître mes résultats sans avoir besoin de lire tout mon texte; c'est pourquoi je vais les présenter tout de suite.

Le calcul de la projection canonique $P(a^p/p!)$ doit être universel, c'est-à-dire, il doit être valable même si A est l'algèbre de Lie librement engendrée par des indéterminées (non commutatives) $a_1, ..., a_m$; dans ce cas-là, si E est l'espace vectoriel librement engendré par $a_1, ..., a_m$, on sait que UA est l'algèbre tensorielle TE et que A est l'algèbre de Lie engendrée par E dans

TE. Manifestement $P(a^p/p!)$ doit pouvoir être écrit comme combinaison linéaire de monômes tels que

$$a_{i_1}^{q_1} a_{i_2}^{q_2} \cdots \cdots a_{i_n}^{q_n};$$

ce monôme sera désigné par l'abréviation a_i^q; décrivons minutieusement les monômes a_i^q acceptables; d'abord les monômes commutatifs associés aux monômes non commutatifs a^p et a_i^q doivent être égaux; ceci implique l'égalité du degré total $\|p\| = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ avec le degré total $\|q\|$; j'exclus le cas trivial où $\|p\| = 0$; donc $n \geqslant 1$; ensuite les exposants $q_1, ..., q_n$ doivent être $\geqslant 1$; donc $q_k = 1$ si a_{i_k} est impair; enfin, les indices $i_1, ..., i_n$ sont compris entre 1 et m, et il peut y avoir des répétitions dans la suite $(i_1, ..., i_n)$, puisqu'il s'agit d'un monôme non commutatif; mais deux indices successifs ne doivent jamais être égaux; je note α (resp. β) le nombre de montées (resp. descentes), c'est-à-dire, le nombre de couples (i_k, i_{k+1}) tels que $i_k < i_{k+1}$ (resp. $i_k > i_{k+1}$); par conséquent $\alpha + \beta = n - 1$. Manifestement, si l'on écrit $P(a^p/p!)$ comme combinaison linéaire des monômes a_i^q, les coefficients de cette combinaison linéaire sont uniques, si on leur impose d'être universels; ce sont ces coefficients que je veux calculer; en effet, si on les connaît, on sait écrire $P(a^p/p!)$ au moyen du crochet d'algèbre de Lie de A, sans utiliser UA, grâce au théorème (12) déjà connu, que je rappellerai plus loin, à la fin du § 1.

(3) THÉORÈME. *Dans l'expression de $P(a^p/p!)$, le coefficient du monôme a_i^q (explicité ci-dessus) est le produit de tous les nombres $\sigma(a_{i_h}, a_{i_k})$ tels que $h < k$ et $i_h > i_k$, et d'un nombre rationnel $\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n)$, qui ne dépend que de α et β (définis ci-dessus) et de la suite non ordonnée $(q_1, q_2, ..., q_n)$; c'est-à-dire, une permutation sur cette suite ne le modifie pas.*

Il s'agit maintenant de trouver une méthode pour calculer les coefficients λ, c'est-à-dire, les coefficients $\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n)$. Mais considérons d'abord l'automorphisme linéaire f de A défini par $f(b) = -b$; f est un anti-automorphisme gradué de l'algèbre de Lie A:

$$[f(b), f(c)] = \sigma(b, c) \cdot f([c, b]);$$

donc f se prolonge en un anti-automorphisme gradué de UA; ceci fait référence à la graduation de UA par la parité; U^+A (resp. U^-A) est le sous-espace engendré par les produits d'éléments homogènes de A, le nombre des facteurs impairs étant pair (resp. impair); on en déduit rapidement l'identité

$$\lambda(\beta, \alpha; q_1, ..., q_n) = (-1)^{\|q\|-1} \lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n) \tag{4}$$

avec $\|q\| = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$.

Je ne serai satisfait par une méthode de calcul des coefficients λ, que si elle fait apparaître la symétrie explicitée dans (4); cette symétrie apparaît déjà dans les coefficients trouvés par Solomon, bien qu'il utilise uniquement le nombre $\beta+1$ de sous-suites pleines croissantes maximales dans la suite $(i_1, ..., i_n)$; voici le coefficient qu'il a trouvé lorsque $p_1, ..., p_m$ sont tous égaux à 1 (donc $q_1, ..., q_n$ aussi):

$$\frac{(-1)^\beta \beta!(n-\beta-1)!}{n!} = \frac{(-1)^\beta \alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}. \tag{5}$$

Je vais maintenant présenter un procédé de calcul des coefficients λ; j'introduis la fonction suivante:

$$F(u, x) = \frac{1}{\dfrac{1}{1-e^{-x}} - u} = \frac{e^x - 1}{(1-u)\,e^x + u};$$

il me suffit de faire varier u dans l'intervalle $[0, 1]$, ce qui permet *à* x d'être n'importe quel nombre complexe dont la partie imaginaire est dans $]-\pi, +\pi[$.

(6) THÉORÈME. *Lorsque* α *et* β *sont fixés, on trouve pour les coefficients* λ *la fonction génératrice que voici*:

$$\int_0^1 u^\alpha(u-1)^\beta F(u, x_2) \cdots F(u, x_n)\, du$$
$$= \Sigma\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n)\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_m};$$

on somme sur toutes les suites $(q_1, ..., q_n)$ *d'exposants* $\geqslant 1$.

Pour déduire la symétrie (4) du théorème (6), il suffit de faire le changement de variable $u \mapsto 1-u$ dans l'intégrale écrite ci-dessus, en utilisant l'identité

$$F(u, x) = -F(1-u, -x). \tag{7}$$

Le théorème (6) n'est satisfaisant que si l'on connaît le développement en série entière de $F(u, x)$:

$$F(u, x) = \sum_{q \geqslant 1} \frac{1}{q!} F_q(u) \cdot x^q,$$

afin de pouvoir écrire

$$\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n) = \int_0^1 u^\alpha(u-1)^\beta \frac{1}{q_1!} F_{q_1}(u) \cdots \frac{1}{q_n!} F_{q_n}(u)\, du.$$

Chaque fonction F_q est un polynôme de degré $q-1$, dont on peut écrire les coefficients au moyen des nombres de Stirling:

$$F_q(u) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} (-1)^{q-j} j!\, S(q, j)\, u^{j-1}; \tag{8a}$$

je rappelle que $S(q, j)$ est le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal q en j sous-ensembles. Malheureusement, la formule (8a) ne fait pas apparaître l'identité

$$F_q(u) = (-1)^{q-1} F_q(1-u)$$

qui est équivalente à (7); mais cette identité apparaît sur une autre expression de F_q:

$$F_q(u) = \sum_{\alpha+\beta=q-1} N(\alpha, \beta)\, u^\alpha (u-1)^\beta; \tag{8b}$$

les coefficients $N(\alpha, \beta)$ sont connus sous le nom de nombres eulériens, mais avec des notations différentes (voir § 5); $N(\alpha, \beta)$ est le nombre des permutations w des entiers $1, 2, ..., \alpha+\beta+1$, telles que la suite $(w(1), w(2), ..., w(\alpha+\beta+1))$ présente α montées et β descentes; l'identité (7) est maintenant équivalente à $N(\alpha, \beta) = N(\beta, \alpha)$.

Pour retrouver à partir du théorème (6) les coefficients trouvés par Solomon (voir (5) plus haut), il suffit de savoir que $F_1(u) = 1$.

Je crois utile de dire tout de suite que j'ai obtenu la fonction $F(u, x)$ en résolvant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}(u(u-1)F) + 1 \tag{9}$$

avec la condition supplémentaire $F(u, 0) = 0$. Grâce à (9) on peut rapidement vérifier que le théorème (6) donne pour $n = 1$ les coefficients triviaux que voici:

$$\begin{aligned} \lambda(0, 0; q) &= 1 \quad \text{si} \quad q = 1, \\ &= 0 \quad \text{si} \quad q \geqslant 2; \end{aligned} \tag{10}$$

en effet il résulte immédiatement de (9) que

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 F(u, x)\, du = 1.$$

Le théorème (6) permet d'introduire les nombres de Bernouilli B_r dans le calcul des coefficients λ; je rappelle que

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{r\geqslant 0}\frac{(-1)^r}{r!}B_r x^{r-1},$$

et que B_r est nul si r est impair $\geqslant 3$. En partant de l'identité

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x_n}}-u\right)F(u,x_n)=1,$$

on déduit facilement de (6) que

$$\lambda(\alpha+1,\beta;1,q_1,...,q_n)$$
$$=\sum_{0\leqslant r\leqslant q_n}\frac{(-1)^r}{r!}B_r\lambda(\alpha,\beta;q_1,...,q_{n-1},q_n+1-r). \tag{11a}$$

A cause de la symétrie (4), on peut aussi écrire

$$\lambda(\alpha,\beta+1;1,q_1,...,q_n)$$
$$=\sum_{0\leqslant r\leqslant q_n}\frac{1}{r!}B_r\lambda(\alpha,\beta;q_1,...,q_{n-1},q_n+1-r). \tag{11b}$$

La formule (11a) ou (11b) permet de calculer par récurrence les coefficients λ à partir de ceux trouvés par Solomon; pour expliquer ceci, j'attribue à chaque coefficient λ trois paramètres entiers, le premier étant la somme des deux autres:

son degré $\|q\|=q_1+q_2+\cdots+q_n$,
sa longueur $n=\alpha+\beta+1$,
sa complexité $\|q-1\|=(q_1-1)+(q_2-1)+\cdots+(q_n-1)$;

on voit que (11) permet de calculer $\lambda(\alpha,\beta;q_1,...,q_{n-1},q_n+1)$ au moyen de coefficients de complexité (strictement) inférieure; or, les coefficients de complexité nulle sont ceux calculés par Solomon (voir (5) plus haut).

Je donnerai au § 6 d'autres formules de récurrence permettant de calculer tout coefficient λ au moyen de coefficients de complexité inférieure; elles peuvent être trouvées sans le théorème (6), en utilisant seulement le théorème (3) et le fait que $P(a^p/p!)\in A$; en effet on sait que dans UA les éléments b de A sont caractérisés par la propriété suivante (où intervient le coproduit C de UA):

$$C(b)=b\otimes 1+1\otimes b;$$

en utilisant le fait que ceci est vrai chaque fois que $b = P(a^p/p!)$, on obtient de telles formules de récurrence.

Les égalités (11a, b) peuvent aussi être utilisées d'une autre façon; la connaissance des coefficients triviaux $\lambda(0, 0; q)$ (voir (10)) nous permet de trouver instantanément les coefficients suivants:

$$\lambda(1, 0; 1, q) = (-1)^q B_q/q!,$$
$$\lambda(0, 1; 1, q) = B_q/q!.$$

Ces coefficients étaient déjà connus (voir par exemple [G], ou bien [B], exercice 3 du § 6).

Il ne me reste plus qu'à rappeler le théorème qui permet d'écrire $P(a^p/p!)$ avec le crochet de l'algèbre de Lie A, sans utiliser l'algèbre UA.

(12) THÉORÈME. *Soient respectivement E et A l'espace vectoriel et l'algèbre de Lie librement engendrés par des indéterminées $a_1, ..., a_m$; donc $UA = TE$; pour tout entier $k \geqslant 1$ on définit une application linéaire g_k de T^kE dans A par la récurrence suivante*:

$$g_1(b) = b \qquad si \quad b \in E,$$
$$g_k(b \otimes x) = [b, g_{k-1}(x)] \qquad si \quad x \in T^{k-1}E;$$

soit g l'application linéaire de $U'A = T^{\geqslant 1}E$ dans A dont la restriction à chaque T^kE est g_k/k. On affirme que la restriction de g à A est l'application identique.

Ce théorème se trouve par exemple dans [B]; il est valable même si l'on attribue des parités aux indéterminées $a_1, ..., a_m$. Il permet d'exprimer $P(a^p/p!)$ au moyen de crochets composés lorsque A est l'algèbre de Lie mentionnée dans (12); mais les formules ainsi obtenues sont valables pour toute autre algèbre de Lie, puisqu'elle est le quotient d'une algèbre de Lie libre, de la façon qu'on devine. Evidemment quand on exprime ainsi $P(a^p/p!)$ au moyen de crochets composés, les coefficients ne sont plus uniques, à cause des relations linéaires entre tous ces crochets.

2. UN THÉORÈME SUR DES HOMOMORPHISMES DE COGÈBRES

Comme auparavant $A = A^+ \oplus A^-$ est une algèbre de Lie graduée par la parité; nous étudierons d'abord le coproduit C de UA et ses itérés C_k, qui sont définis au § 1 juste avant le théorème (2). Soient $a_1, ..., a_m$ (avec $m \geqslant 1$) des éléments homogènes de A; on note E l'ensemble des m premiers entiers

>0; si E' est un sous-ensemble de E, dont les éléments sont $i_1, ..., i_p$ par ordre croissant, on pose

$$a_{E'} = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} \qquad \text{(produit dans } UA\text{);}$$

si E' est vide, alors $a_{E'} = 1$. Si E'' est aussi un sous-ensemble de E, dont les éléments sont $j_1, ..., j_q$, on note $\operatorname{sgn}(E', E'')$ le produit de tous les nombres $\sigma(a_{i_h}, a_{j_k})$ tels que $i_h > j_k$. On trouve facilement que

$$C(a_E) = \Sigma \operatorname{sgn}(E', E'')\, a_{E'} \otimes a_{E''}, \tag{13}$$

la sommation se faisant sur tous les couples (E', E'') de sous-ensembles complémentaires de E.

Soit $U'A$ l'idéal engendré par A dans UA, et soit C'_k la projection de C_k dans $T^k(U'A)$; de la formule (13) on déduit

$$C'_k(a_E) = \Sigma \operatorname{sgn}(E_1, E_2, ..., E_k)\, a_{E_1} \otimes a_{E_2} \otimes \cdots \otimes a_{E_k}; \tag{14}$$

la sommation se fait sur les suites $(E_1, E_2, ..., E_k)$ telles que $E_1, ..., E_k$ constituent une partition de E, et $\operatorname{sgn}(E_1, ..., E_k)$ est le produit des nombres $\operatorname{sgn}(E_r, E_s)$ tels que $r < s$. Une telle suite $(E_1, ..., E_k)$ sera appelée une partition ordonnée de E; à une partition (non ordonnée) de E en k sous-ensembles (non vides) correspondent $k!$ partitions ordonnées. Si $k > m$, évidemment $C'_k(a_E) = 0$.

Soit encore $B = B^+ \oplus B^-$ une algèbre de Lie graduée par la parité; je rappelle que les algèbres UA et UB sont aussi graduées par la parité (voir § 1, juste avant (4)); l'espace $\operatorname{Hom}(UA, UB)$ des applications linéaires f de UA dans UB est aussi gradué par la parité: f est pair si $f(U^+A) \subset U^+A$ et $f(U^-A) \subset U^-B$. Puisque UA est une cogèbre et UB une algèbre, l'espace $\operatorname{Hom}(UA, UB)$ est une algèbre; le produit $f \times g$ de deux de ses éléments f et g est

$$UA \xrightarrow{\text{coproduit}} UA \otimes UA \xrightarrow{f \otimes g} UB \otimes UB \xrightarrow{\text{produit}} UB.$$

J'écrirai toujours le symbole $\times$ pour préciser qu'un produit ou une puissance a été définie au moyen d'un coproduit. Utilisez (13) pour calculer explicitement $(f \times g)(a_E)$; dans ce contexte de graduations par la parité il faut savoir que

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = \sigma(g, x)\, f(x) \otimes g(y) \qquad \text{si} \quad x \text{ et } y \in UA.$$

Lorsque $f(1) = 0$, les puissances $f^{k\times}$ peuvent être calculées grâce à (14):

$$f^{k\times}: UA \to T^k(U'A) \to T^k(UB) \to UB;$$

je précise que $f^{0\times}$ est l'élément unité de l'algèbre Hom(UA, UB), c'est-à-dire $UA \to K \to UB$. Puisque $f^{k\times}(a_E)=0$ dès que $k>m$, on peut définir

$$\operatorname{Exp} f = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{k\times};$$

j'écrirai toujours Exp pour désigner une telle exponentielle; en effet, si $A=B$ (ce qui sera souvent le cas), il faut absolument distinguer $\operatorname{Exp} f$ de $\exp f$, qui fait intervenir les puissances banales

$$f^k\colon UA \to UA \to UA \to \cdots \to UA.$$

Voici le résultat essentiel de ce § 2. Grâce à [I], j'ai pu améliorer ma démonstration initiale.

(15) THÉORÈME. *Soit F une application linéaire paire de UA dans UB, et soit f sa projection canonique dans B:*

$$f\colon UA \xrightarrow{F} UB \xrightarrow{J^{-1}} U_0B \xrightarrow{\text{proj.}} B \xrightarrow{\text{inj.}} UB;$$

si F est un homomorphisme de cogèbres, alors $f(1)=0$ et $F=\operatorname{Exp} f$. Réciproquement si f est un élément pair de Hom(UA, UB), *à valeurs dans B, tel que $f(1)=0$, alors* $\operatorname{Exp} f$ *est un homomorphisme de cogèbres, et pour tout entier $k\geqslant 0$, la projection canonique de* $\operatorname{Exp} f$ *dans U^kB est $f^{k\times}/k!$.*

La démonstration de ce théorème commence par les lemmes suivants.

(16) LEMME. *Si $f\in$ Hom$^+(UA, UB)$, si $f(UA)\subset B$ et si $f(1)=0$, alors* $\operatorname{Exp} f$ *est un homomorphisme de cogèbres.*

Démonstration. Soit $C_A(UA \to UA\otimes UA)$ le coproduit de UA et soit C_B celui de UB. Il s'agit de démontrer que

$$C_B \circ \operatorname{Exp} f = (\operatorname{Exp} f \otimes \operatorname{Exp} f)\circ C_A.$$

Puisque C_B est un homomorphisme d'algèbres, on a

$$C_B \circ \operatorname{Exp} f = \operatorname{Exp}(C_B \circ f).$$

Puisque f prend ses valeurs dans B, on a

$$C_B \circ f = (f\otimes 1 + 1\otimes f)\circ C_A.$$

Cependant l'application $\varphi \mapsto \varphi\circ C_A$ est un homomorphisme de l'algèbre Hom$(UA\otimes UA, UB\otimes UB)$ dans l'algèbre Hom$(UA, UB\otimes UB)$; en effet la cogèbre UA est cocommutative (en tant que cogèbre graduée), donc C_A est aussi un homomorphisme de cogèbres; par conséquent

$$\operatorname{Exp}((f\otimes 1+1\otimes f)\circ C_A)=(\operatorname{Exp}(f\otimes 1+1\otimes f))\circ C_A.$$

Puisque f est pair, $f\otimes 1$ et $1\otimes f$ commutent; donc

$$\operatorname{Exp}(f\otimes 1+1\otimes f)=\operatorname{Exp} f\otimes \operatorname{Exp} f.$$

Ceci termine la démonstration; elle se trouvait (presque telle quelle) dans [I], pour un élément f de $\operatorname{Hom}^+(U_0A, U_0B)$; mais comme la propriété de commutativité graduée de l'algèbre U_0B n'est pas utilisée, elle fonctionne aussi avec UA et UB.

(17) COROLLAIRE. *L'application $J(U_0A\to UA)$ définie au* § 1 *est un isomorphisme de cogèbres.*

En effet, soit Q l'élément de $\operatorname{Hom}(U_0A, UA)$ défini ainsi:

$$Q(a)=a \quad \text{si} \quad a\in A,$$
$$Q(U_0^kA)=0 \quad \text{si} \quad k\neq 1;$$

Q est pair et $Q(1)=0$; en outre dans [I] on nous fait remarquer que $J=\operatorname{Exp} Q$; on peut le vérifier grâce à (14); donc J est un homomorphisme de cogèbres. On trouve dans [M, M] des arguments prouvant qu'il est bijectif.

(18) LEMMA. *Les hypothèses sont celles du lemme* (16); *pour tout entier $k\geqslant 0$, $f^{k\times}$ prend ses valeurs dans U^kB.*

Démonstration. Définissons une application Q de U_0B dans UB comme nous l'avons fait plus haut pour U_0A et UA. Soit g l'élément de $\operatorname{Hom}(UA, U_0B)$ tel que $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in UA$; observons que

$$f=Q\circ \operatorname{Exp} g;$$

or $\operatorname{Exp} g$ est un homomorphisme de cogèbres (à cause de (16)); donc

$$f^{k\times}=Q^{k\times}\circ \operatorname{Exp} g;$$

puisque $Q^{k\times}/k!$ représente la restriction de J à U_0^kB, on conclut que $f^{k\times}$ prend ses valeurs dans U^kB.

Fin de la démonstration de (15). Supposons que F soit un homomorphisme de cogèbres de UA dans UB, et que f soit sa projection canonique dans B. On sait que F doit respecter les unités et les co-unités de UA et UB; en effet tout élément x de UA tel que $C(x) = x \otimes x$ est égal à 1; et toute forme linéaire ξ sur UA telle que

$$UA \xrightarrow{C} UA \otimes UA \xrightarrow{\xi \otimes I} K \otimes UA \xrightarrow{\text{isom.}} UA$$

soit l'application identique de UA, est égale à la co-unité C_0, projection de UA sur K; et de même pour UB. L'égalité $F(1) = 1$ implique $f(1) = 0$. Définissons les applications J et Q de $U_0 B$ dans UB comme auparavant, et posons $G = J^{-1} \circ F$. Puisque $J = \operatorname{Exp} Q$, nous avons

$$F = (\operatorname{Exp} Q) \circ G.$$

Puisque J est un isomorphisme de cogèbres, G est aussi un homomorphisme de cogèbres, donc

$$F = \operatorname{Exp}(Q \circ G).$$

Cependant $Q \circ G = f$, et la démonstration est terminée.

Ici le théorème (15) servira uniquement à affirmer ceci: l'application identique I de UA est égale à $\operatorname{Exp} P$, où P est la projection canonique sur A; et pour tout $k \geqslant 0$, la projection canonique sur $U^k A$ est $P^{k\times}/k!$. Ceci démontre instantanément le théorème (2), puisque la définition de $P^{k\times}$ signifie qu'il est égal à $(T_U^k P) \circ C_k$.

Je reviens maintenant au théorème (1) consacré à la série de Hausdorff; pour être plus clair, j'introduis une indéterminée t qui commute avec $a_1, ..., a_m$, afin de pouvoir écrire des égalités entre séries formelles en t à coefficients dans UA; d'après la définition de la série H, on a

$$\exp H(ta_1, ..., ta_m) = (\exp ta_1) \cdots (\exp ta_m);$$

cependant pour tout élément b de A on peut écrire

$$b = P(\exp b);$$

si l'on sait que la série $H(a_1, ..., a_m)$ prend ses valeurs dans A, on peut remplacer b par $H(ta_1, ..., ta_m)$ et l'on obtient l'égalité

$$H(ta_1, ..., ta_m) = P((\exp ta_1) \cdots (\exp ta_m)),$$

dont le théorème (1) est une conséquence immédiate.

Je voudrais cependant montrer que le théorème (15) fournit une nouvelle démonstration du théorème (1), et donc aussi du fait que la série $H(a_1, ..., a_m)$ prend ses valeurs dans A. Pour simplifier les notations, je ne traiterai que le cas où $m = 2$. On sait que l'application

$$M: U(A \oplus A) = UA \otimes UA \to UA,$$

qui provient de la structure d'algèbre de UA, est un homomorphisme de cogèbres (cette affirmation est équivalente au fait que C est un homomorphisme d'algèbres); donc d'après (15),

$$M = \operatorname{Exp}(P \circ M),$$

et en particulier

$$(\exp ta_1)(\exp ta_2) = \operatorname{Exp}(P \circ M)(\exp t(a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_2)).$$

Soit B une autre algèbre de Lie; pour tout $b \in B$, on a

$$C_B(\exp tb) = (\exp tb) \otimes (\exp tb),$$

et ceci implique que l'application $g \mapsto g(\exp tb)$ est un homomorphisme de l'algèbre $\operatorname{Hom}(UB, UA)$ dans l'algèbre des séries formelles en t à coefficients dans UA:

$$(f \times g)(\exp tb) = f(\exp tb) \cdot g(\exp tb);$$

si $g(1) = 0$, on a donc

$$(\operatorname{Exp} g)(\exp tb) = \exp(g(\exp tb)).$$

Supposons que $B = A \oplus A$; remplaçons g par $P \circ M$, et b par $a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_2$; nous obtenons

$$(\exp ta_1)(\exp ta_2) = \exp(P((\exp ta_1)(\exp ta_2)));$$

ceci implique l'égalité qu'il fallait démontrer:

$$H(ta_1, ta_2) = P((\exp ta_1)(\exp ta_2)).$$

3. Le problème de Solomon

Les notations sont celles du début du § 2; le problème qui nous occupera ici, est le calcul de $P(a_E)$, projection canonique de $a_1 a_2 \cdots a_m$ dans A. Ce problème a été résolu par Solomon pour une algèbre de Lie sans graduation par la parité, mais je suppose que sa méthode pourrait affronter une telle graduation; en outre il fait une projection dans l'algèbre tensorielle TA, parallèlement à l'idéal qui est le noyau de l'homomorphisme-quotient $TA \to UA$, et parallèlement aux sous-espaces de tenseurs symétriques d'ordre $\neq 1$; mais on se convainc facilement que cela revient au même. Je propose de déduire du théorème (15) la solution à ce problème.

(19) THÉORÈME. *Pour tout* $m \geqslant 1$ *on a l'égalité*

$$P(a_1 a_2 \cdots a_m) = \sum_w \operatorname{sgn}(a_w) \frac{(-1)^\beta \alpha!\, \beta!}{(\alpha+\beta+1)!} a_{w(1)} a_{w(2)} \cdots a_{w(m)};$$

on somme sur toutes les permutations w *des* m *premiers entiers positifs;* $\operatorname{sgn}(a_w)$ *est le produit des nombres* $\sigma(a_{w(i)}, a_{w(j)})$ *tels que* $i<j$ *et* $w(i)>w(j)$; *et* α (*resp.* β) *est le nombre de montées* (*resp. descentes*) *dans la suite* $(w(1), ..., w(m))$; *donc* $\alpha+\beta+1=m$.

Démonstration. D'après le théorème (15), l'application identique I de UA est égale à Exp P; donc

$$\begin{aligned} P &= \log I \\ &= \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (I-1)^{k\times}. \end{aligned}$$

Précisons tout de suite le sens de l'expression $I-1$, où figurent les éléments unités de $\operatorname{Hom}(UA, UA)$ pour deux multiplications absolument différentes; $I-1$ est simplement la projection sur l'idéal $U'A$ engendré par A. Explicitons l'égalité précédente au moyen des coproduits itérés $C_k(UA \to T^k UA)$ et des multiplications itérées $M_k(T^k UA \to UA)$; si C'_k est la projection de C_k dans $T^k U'A$, nous avons

$$P = \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M_k \circ C'_k. \tag{20}$$

Par conséquent, d'après (14),

$$P(a_E) = \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{sgn}(E_1, ..., E_k)\, a_{E_1} a_{E_2} \cdots a_{E_k},$$

avec sommation sur toutes les partitions ordonnées de E, le nombre k des sous-ensembles étant quelconque. Nous pouvons écrire ceci avec une sommation sur toutes les permutations w de E:

$$P(a_E) = \sum_w \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \mu(w, k) \operatorname{sgn}(a_w)\, a_{w(1)} a_{w(2)} \cdots a_{w(m)};$$

$\mu(w, k)$ est le nombre de toutes les partitions ordonnées $(E_1, ..., E_k)$ telles que le monôme $a_{E_1} a_{E_2} \cdots a_{E_k}$ soit universellement égal au monôme $a_{w(1)} a_{w(2)} \cdots a_{w(m)}$. Il s'agit donc de dénombrer toutes les façons de décomposer la suite $(w(1), ..., w(m))$ en une succession de k sous-suites pleines croissantes; évidemment ceci n'est possible que si $\beta+1 \leqslant k \leqslant m$, car dans la suite complète $(w(1), \ldots, w(m))$ les β descentes sont obligatoirement des frontières entre deux telles sous-suites; il reste à placer $(k-\beta-1)$ frontières, que l'on peut choisir arbitrairement parmi les α montées; donc

$$\mu(w, k)=\frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \qquad \text{avec} \quad j=k-\beta-1.$$

Il ne reste plus qu'à calculer

$$\sum_{\beta+1 \leqslant k \leqslant m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \mu(w, k)=\sum_{0 \leqslant j \leqslant \alpha} \frac{(-1)^{\beta+j}}{\beta+j+1} \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}.$$

La démonstration s'achève avec le lemme suivant.

(21) Lemme. *Si α et β sont des entiers $\geqslant 0$, alors*

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant \alpha} \frac{(-1)^{j}}{\beta+j+1} \frac{\alpha!}{j!\,(\alpha-j)!}=\frac{\alpha!\,\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}.$$

Démonstration. Posons $m=\alpha+\beta+1$ et considérons la fonction numérique

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}(x+1)^{m} \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} x^{k-1}. \end{aligned}$$

Toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre $m-1$ s'annulent pour $x=-1$; calculons explicitement sa dérivée d'ordre β:

$$\begin{aligned} f^{(\beta)}(x) &= \frac{(-1)^{\beta}\beta!}{x^{\beta+1}}+\sum_{\beta+1 \leqslant k \leqslant m} \frac{m!\, x^{k-\beta-1}}{k \cdot(k-\beta-1)!\,(m-k)!} \\ &= \frac{(-1)^{\beta}\beta!}{x^{\beta+1}}+\sum_{0 \leqslant j \leqslant \alpha} \frac{(\alpha+\beta+1)!\, x^{j}}{(\beta+j+1) \cdot j!\,(\alpha-j)!}. \end{aligned}$$

En écrivant que cette dérivée s'annule pour $x=-1$, on obtient l'égalité annoncée.

Mon objectif principal est le calcul de $P(a^{p}/p!)$, projection canonique du monôme explicité au début du § 1; on pourrait faire ce calcul à partir de l'égalité (20), mais j'ai constaté que cela serait très ardu; en particulier, il faudrait utiliser tout de suite la formule suivante, qui provoque l'irruption des nombres de Stirling:

$$j!\, S(q, j)=\Sigma \frac{q!}{k_{1}!\, k_{2}! \cdots k_{j}!}, \tag{22}$$

avec sommation sur toutes les suites $(k_1, ..., k_j)$ d'entiers (strictement) positifs telles que $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = q$; ensuite il faudrait trouver par quoi remplacer le lemme (21) dans cette situation embrouillée; j'y ai renoncé. J'utiliserai une autre méthode, qui est basée sur la remarque suivante:

$$\frac{(-1)^\beta \alpha! \, \beta!}{(\alpha+\beta+1)!} = \int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta \, du; \tag{23}$$

c'est cette remarque qui m'a suggéré l'idée que les coefficients λ pourraient être calculés comme intégrales de polynômes sur $[0, 1]$; cette méthode de calcul plus efficace sera expliquée au § 4; elle suppose acquis le théorème (19).

Bien que le calcul direct de $P(a^p/p!)$ au moyen de (20) aboutisse difficilement à un résultat satisfaisant, il fournit cependant tout de suite une démonstration du théorème (3), indépendante de celle que je donnerai au § 4.

4. Polynôme associé à un ensemble de permutations

Soit W un ensemble de permutations de l'ensemble des r premiers entiers > 0 (avec $r \geqslant 1$); à chaque élément w de W j'associe le polynôme élémentaire $u^\alpha (u-1)^\beta$, où α (resp. β) est le nombre de montées (resp. descentes) dans la suite $(w(1), ..., w(r))$; par définition le polynôme $F_W(u)$ associé à W est la somme de tous les polynômes élémentaires associés aux éléments de W; c'est un polynôme de degré $r-1$.

Si W est l'ensemble de toutes les permutations des r premiers entiers, le polynôme associé sera noté $F_r(u)$; par conséquent

$$F_r(u) = \sum_{\alpha+\beta=r-1} N(\alpha, \beta) \, u^\alpha (u-1)^\beta;$$

le coefficient $N(\alpha, \beta)$ est égal au nombre de permutations des r premiers entiers, avec α montées et β descentes; j'en dirai plus au § 5.

Voici maintenant l'ensemble W dont j'ai besoin de calculer le polynôme associé. Revenons aux monômes $a^p/p!$ et a_i^q explicités au § 1:

$$a^p/p! = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_m^{p_m} / p_1! \, p_2 \cdots p_m!,$$
$$a_i^q = a_{i_1}^{q_1} a_{i_2}^{q_2} \cdots a_{i_n}^{q_n}.$$

Je rappelle que les monômes commutatifs associés à a^p et a_i^q doivent être égaux; ils ont donc même degré total $r = \|p\| = \|q\|$. Je définis la suite $(b_1, ..., b_r)$ de la façon suivante: $b_1, b_2, ..., b_{p_1}$ sont tous égaux à a_1; puis

$b_{p_1+1}, \ldots, b_{p_1+p_2}$ sont tous égaux à a_2; et ainsi de suite; donc $b_1 b_2 \cdots b_r$ est égal au monôme a^p. L'ensemble W est l'ensemble des permutations w telles que $b_{w(1)} b_{w(2)}, \ldots, b_{w(r)}$ soit égal au monôme a_i^q. Du théorème (19) et de l'égalité (23) je déduis ceci:

(24) LEMME. *Quand on écrit $P(a^p/p!)$ comme combinaison linéaire des monômes tels que a_i^q, le coefficient de a_i^q est égal à*

$$\frac{1}{p!} \int_0^1 \operatorname{sgn}(a_i) \cdot F_W(u)\, du,$$

où F_W est le polynôme associé à l'ensemble W de permutations défini ci-dessus.

Ce lemme ne serait pas vrai si on n'exigeait pas que l'exposant p_j attribué à tout facteur a_j impair soit toujours $\leqslant 1$.

Le travail essentiel de ce § 4 sera la démonstration du lemme suivant.

(25) LEMME. *Si α et β sont respectivement les nombres de montées et de descentes dans la suite $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, le polynôme F_W est égal à*

$$\frac{p!}{q!} u^\alpha (u-1)^\beta F_{q_1}(u) F_{q_2}(u) \cdots F_{q_n}(u)$$

(en posant $q! = q_1!\, q_2! \cdots q_n!$).

Remarquons déjà que les lemmes (24) et (25) impliquent le théorème (3); en effet, à l'exception du signe $\operatorname{sgn}(a_i)$, le coefficient du monôme a_i^q ne dépend pas du monôme $a^p/p!$, mais seulement de α, β et de la suite non ordonnée $(q_1, \ldots, q_n)$, ce qui permet de le noter $\lambda(\alpha, \beta; q_1, \ldots, q_n)$. De (24) et (25) on déduit ceci:

(26) COROLLAIRE. *Si $F(u, x)$ est la fonction définie ainsi:*

$$F(u, x) = \sum_{r \geqslant 1} \frac{1}{r!} F_r(u) \cdot x^r,$$

on peut écrire l'égalité

$$\int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta F(u, x_1) F(u, x_2) \cdots F(u, x_n)\, du$$

$$= \Sigma \lambda(\alpha, \beta; q_1, \ldots, q_n)\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n},$$

avec sommation sur les suites $(q_1, \ldots, q_n)$ d'exposants $\geqslant 1$.

Pour finir la démonstration du théorème (6), il ne me restera plus qu'à calculer la fonction $F(u, x)$ définie ci-dessus dans (26); ce sera l'objectif du § 5. Il est clair que la série $\Sigma F_r(u)\, x^r/r!$ qui définit $F(u, x)$, est normalement convergente tant que $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $|x| \leqslant 1-\varepsilon$ (avec $0<\varepsilon<1$), à cause de l'égalité

$$\sum_{\alpha+\beta=r-1} N(\alpha, \beta) = r!.$$

Démonstration de (25). Précisons d'abord les notations: ici E (resp. E') (resp. E'') est l'ensemble des r (resp. m) (resp. n) premiers entiers >0. La suite $(p_1, ..., p_m)$ détermine une application croissante f' de E dans E', comme ceci: $f'(j)=1$ si $1 \leqslant j \leqslant p_1$; puis $f'(j)=2$ si $p_1+1 \leqslant j \leqslant p_1+p_2$; et ainsi de suite $\cdots$ De même la suite $(q_1, ..., q_n)$ détermine une application croissante f'' de E sur E''. La suite $(i_1, ..., i_n)$ détermine une application f de E'' dans E', simplement comme ceci: $f(h)=i_h$. Soit G' (resp. G'') le groupe des permutations g de E telles que $f' \circ g = f'$ (resp. $f'' \circ g = f''$); G' (resp. G'') est un groupe d'ordre $p! = p_1!\, p_2! \cdots p_m!$ (resp. $q!$). L'ensemble W qui nous intéresse ici, est l'ensemble des permutations w de E telles que

$$f' \circ w = f \circ f'';$$

donc W est une classe à droite modulo le sous-groupe G'. Mais W est aussi une réunion de classes à gauche modulo G''; en effet si $v \in W$ et $f'' \circ v^{-1} = f'' \circ w^{-1}$, nécessairement $w \in W$. Ainsi W est la réunion de $p!/q!$ classes à gauche modulo G''; je vais montrer que le polynôme associé à chaque classe vG'' est

$$u^\alpha (u-1)^\beta F_{q_1}(u)\, F_{q_2}(u) \cdots F_{q_n}(u),$$

et ceci démontrera (25). Les éléments w de vG'' sont caractérisés par l'égalité $f'' \circ v^{-1} = f'' \circ w^{-1}$; si l'on pose $E_j = v(f''^{-1}(j))$, cette condition équivaut à exiger que $w(f''^{-1}(j)) = E_j$ pour tout $j \in E''$; donc la classe vG'' est déterminée par la partition ordonnée $(E_1, ..., E_n)$ de E. Soit G le groupe des permutations g de E telles que $g(E_j) = E_j$ pour tout $j \in E''$; G est isomorphe au produit direct des groupes complets G_j de permutations des sous-ensembles E_j; si $g \in G$, je noterai g_j son image dans le groupe G_j. La classe à gauche vG'' est égale à la classe à droite Gv. Pour tout $w \in Gv$, j'appelle $\alpha(w)$ (resp. $\beta(w)$) le nombre de montées (resp. descentes) dans la suite $(w(1), ..., w(r))$; de même si $g \in G$, je peux définir les nombres $\alpha(g_j)$ et $\beta(g_j)$ pour tout $j \in E''$, car chaque E_j est un ensemble totalement ordonné. Remarquons que dans la classe Gv il y a un unique élément dont la restriction à chaque $f''^{-1}(j)$ est croissante; pour économiser les notations, je suppose que cet élément est précisément v. Calculons maintenant $\alpha(w)$ et $\beta(w)$ lorsque $w = gv$, avec $g \in G$. Les couples $(w(q_1), w(q_1+1))$ et (i_1, i_2) sont tous les deux montants ou descendants, parce que $i_1 = f' \circ w(q_1)$ et $i_2 = f' \circ w(q_1+1)$, et f' est croissante; de même pour les couples $(w(q_1+q_2), w(q_1+q_2+1))$ et (i_2, i_3); et ainsi de suite $\cdots$; dans la suite $(w(1), ..., w(r))$ nous avons déjà dénombré α montées et β descentes. Examinons la sous-suite pleine $(w(1), ..., w(q_1))$; puisque $w = gv$, et que v est croissante sur $f''^{-1}(1)$, cette sous-suite contient $\alpha(g_1)$ montées et $\beta(g_1)$ descentes; de même nous trouvons les nombres $\alpha(g_2)$ et $\beta(g_2)$ pour la sous-suite $(w(q_1+1), ..., w(q_1+q_2))$; et ainsi de suite $\cdots$ Finalement nous trouvons

$$\alpha(w) = \alpha + \alpha(g_1) + \alpha(g_2) + \cdots + \alpha(g_n),$$
$$\beta(w) = \beta + \beta(g_1) + \beta(g_2) + \cdots + \beta(g_n),$$

et ceci démontre le résultat annoncé, puisque chaque variable g_j décrit tout le groupe des permutations d'un ensemble E_j de cardinal q_j.

5. Calcul de la fonction $F(u, x)$

Les nombres $N(\alpha, \beta)$ utilisés au § 4 sont exactement les nombres eulériens notés habituellement $A(n, k)$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$, selon la correspondance suivante:

$$N(\alpha, \beta) = A(\alpha+\beta+1, \alpha) = A(\alpha+\beta+1, \beta).$$

Les nombres eulériens sont les coefficients des polynômes eulériens

$$A_n(t) = \Sigma A(n, k)\, t^k,$$

dont la fonction génératrice

$$\mathscr{A}(t, x) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} A_n(t) \frac{x^n}{n!}$$

est connue depuis Euler:

$$\mathscr{A}(t, x) = \frac{1-t}{e^{x(t-1)} - t}. \tag{27}$$

Voilà ce qu'on peut lire (avec quelques petites variations) dans [R], [F, S] ou [C]. Il semble que la signification combinatoire des nombres eulériens ait été découverte plus d'un siècle après leur définition par le moyen de (27).

Les polynômes $F_n(u)$ introduits au § 4 sont donc liés aux polynômes eulériens $A_n(t)$ de la façon suivante:

$$F_n(u) = u^{n-1} \cdot A_n\left(\frac{u-1}{u}\right).$$

Si on définit $F(u, x)$ comme dans (26), on a la relation

$$u \cdot F(u, x) = \mathscr{A}\left(\frac{u-1}{u}, ux\right) - 1,$$

qui donne après quelques calculs

$$F(u, x) = \frac{e^x - 1}{(1-u)\, e^x + u}. \tag{28}$$

Neanmoins, j'avais déjà réussi le calcul de $F(u, x)$ avant d'avoir consulté les documents sur les nombres eulériens que j'ai cités plus haut. Ma première méthode de calcul a l'avantage d'être plus convaincante et d'introduire l'équation aux dérivées partielles que j'ai mentionnée au § 1 sous le numéro (9), et dont j'aurai encore besoin au § 6. On peut calculer les nombres $N(\alpha, \beta)$ grâce à la relation de récurrence classique

$$N(\alpha, \beta) = (\alpha+1) N(\alpha, \beta-1) + (\beta+1) N(\alpha-1, \beta), \tag{29}$$

dont la signification est évidente; elle figure aussi dans [S], mais avec des notations différentes; j'ajoute que $N(\alpha, 0) = N(0, \beta) = 1$. On déduit de (29) que, pour tout $n > 1$,

$$F_n(u) = \frac{d}{du}\,(u(u-1) \cdot F_{n-1}(u));$$

et puisque $F_1(u) = 1$, on aboutit à

$$\frac{\partial}{\partial x} F(u, x) = \frac{\partial}{\partial u}\,(u(u-1) \cdot F(u, x)) + 1;$$

c'est l'équation aux dérivées partielles déjà citée.

Pour résoudre cette équation, j'ai cherché les courbes intégrales de l'équation différentielle $dx = -du/u(u-1)$; la fonction $(u, x) \mapsto e^x(u-1)/u$

est constante sur ces courbes; donc j'ai pris comme nouvelle inconnue la fonction $G(u, y)$ telle que

$$F(u, x) = G(u, e^x(u-1)/u);$$

elle est solution de l'équation différentielle

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}(u(u-1)\cdot G(u, y)) + 1.$$

Donc

$$G(u, y) = \frac{g(y) - u}{u(u-1)},$$

avec une fonction $g(y)$ qui doit être déterminée par la condition $F(u, 0) = 0$:

$$g\left(\frac{u-1}{u}\right) = u \qquad \text{donc} \qquad g(y) = \frac{-1}{y-1};$$

après quelques calculs on trouve (28).

Maintenant que nous connaissons la fonction $F(u, x)$, nous pouvons chercher à la développer en série entière par un procédé indépendant de ce qui précède; par exemple on peut utiliser l'égalité suivante, où interviennent les nombres de Stirling:

$$(e^x - 1)^j = \sum_{q \geqslant j} \frac{j!}{q!} S(q, j)\, x^q;$$

cette égalité est équivalente à (22); les calculs suivants sont valables au moins si $|u| < 1$ et $|x| < \log 2$:

$$\begin{aligned} F(u, x) &= \frac{1 - e^{-x}}{1 - u(1 - e^{-x})} \\ &= \sum_{j \geqslant 1} u^{j-1}(1 - e^{-x})^j \\ &= \sum_{q \geqslant j \geqslant 1} (-1)^{q-j} \frac{j!}{q!} S(q, j)\, u^{j-1} x^q; \end{aligned}$$

on en déduit l'expression (8a) des polynômes $F_q(u)$ au moyen des nombres de Stirling.

Le théorème (6) est maintenant démontré, et comme application directe de ce théorème, je propose le calcul de la fonction génératrice de certains coefficients λ; dans les 5 égalités suivantes, il faut sommer sur les couples (p, q) d'exposants $\geqslant 1$:

$$\Sigma\lambda(1, 0; p, q)\, x^p y^q = (e^x - 1)\frac{x-y}{e^{x-y}-1} - x. \tag{30a}$$

$$\Sigma\lambda(0, 1; p, q)\, x^p y^q = (1 - e^{-y})\frac{x-y}{e^{x-y}-1} - y. \tag{30b}$$

$$\Sigma\lambda(2, 0; 1, p, q)\, x^p y^q = \frac{e^x(x-y)}{e^{x-y}-1} - \frac{xe^x}{e^x-1} - \frac{y}{1-e^{-y}} + 1. \tag{30c}$$

$$\Sigma\lambda(1, 1; 1, p, q)\, x^p y^q = \frac{x-y}{e^{x-y}-1} - \frac{x}{e^x-1} - \frac{y}{1-e^{-y}} + 1. \tag{30d}$$

$$\Sigma\lambda(0, 2; 1, p, q)\, x^p y^q = \frac{e^{-y}(x-y)}{e^{x-y}-1} - \frac{x}{e^x-1} - \frac{ye^{-y}}{1-e^{-y}} + 1. \tag{30e}$$

Dans chacune de ces 5 égalités, le premier terme du membre de droite contient déjà dans son développement en série entière tous les monômes indiqués dans le membre de gauche; mais il contient en plus des monômes indésirables (de degré 0 en x ou y); les termes suivants ne font rien de plus qu'éliminer ces monômes indésirables.

6. Relations entre les coefficients λ

Ici A sera une algèbre de Lie sans graduation par la parité; c'est l'algèbre de Lie librement engendrée par une infinité dénombrable d'indéterminées. Oublions les théorèmes (3) et (6), et supposons que λ soit une application qui associe à tout couple (α, β) d'entiers $\geqslant 0$ et à toute suite non ordonnée $(q_1, q_2, ..., q_n)$ d'exposants $\geqslant 1$, de longueur $n = \alpha + \beta + 1$, un coefficient $\lambda(\alpha, \beta; q_1, q_2, ..., q_n)$. On peut définir une application linéaire L de UA dans UA de la façon suivante: si la suite $(a_1, ..., a_m)$ est à valeurs parmi les indéterminées qui engendrent A, si deux éléments successifs n'y sont jamais identiques, et si $(p_1, ..., p_m)$ est une suite d'exposants $\geqslant 1$, alors

$$L(a^p/p!) = \Sigma\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n)\, a_i^q; \tag{31}$$

la sommation se fait sur toutes les suites $(i_1, ..., i_n)$ et $(q_1, ..., q_n)$ telles que les monômes commutatifs b^p et b_i^q soient égaux si $b_1, ..., b_m$ sont des indéterminées toutes distinctes; en outre α et β sont les nombres de montées et de descentes dans la suite $(i_1, ..., i_n)$. J'ajoute que $L(1) = 0$. On peut se poser la question suivante: *quelles relations doivent satisfaire les coefficients λ pour que L prenne ses valeurs dans A?*

Voici la réponse: pour que $L(UA) \subset A$, il faut et il suffit que les coefficients λ satisfassent les relations (32a) et (32b) indiquées dans la proposition (32) ci-dessous. Chacune de ces deux relations permet de calculer par récurrence les coefficients λ à partir des "coefficients de complexité nulle", selon la terminologie expliquée à la fin du § 1; en utilisant simultanément ces deux relations, on peut calculer tous les coefficients λ modulo un facteur qui ne dépend que du degré $\|q\|$; manifestement on ne peut pas faire mieux en imposant que $L(UA) \subset A$, puisque dans l'égalité (31) tous les monômes ont même degré total.

Quelle condition peut-on encore imposer à L pour pouvoir calculer tous les coefficients λ à partir du seul coefficient $\lambda(0, 0; 1)$? Voici une réponse: les coefficients λ sont tous déterminés par $\lambda(0, 0; 1)$ si l'on exige, en plus de la condition $L(UA) \subset A$, que l'égalité (31) soit encore vraie pour certains monômes $a^p/p!$ (indiqués dans (34)), où les facteurs $a_1, ..., a_m$ sont toujours choisis dans A, mais pas tous dans l'ensemble des indéterminées qui engendrent A. J'ajoute que l'égalité (31) est alors vraie pour toute suite $(a_1, ..., a_m)$ d'éléments de A et toute suite d'exposants, puisque les coefficients λ sont alors proportionnels à ceux que nous avons étudiés auparavant. On peut aussi en tirer la conclusion que le théorème (3) est une propriété caractéristique de la projection canonique sur l'algèbre de Lie, à un facteur constant près, si l'on impose aux coefficients λ d'être universels.

Voici la proposition (32) qui est le résultat essentiel de ce § 6; j'en fournirai deux démonstrations, à partir d'hypothèses différentes; la première démonstration utilise la définition (31) et l'hypothèse $L(UA) \subset A$; la seconde part de l'hypothèse que les coefficients λ sont ceux que décrit le théorème (6).

(32) Proposition. *Chaque coefficient* $\lambda(\alpha\, \beta; q_1, ..., q_{n-1}, q_n + 1)$, *avec* $q_n + 1 \geqslant 2$, *peut être calculé au moyen de coefficients de complexité inférieure grâce à l'une ou l'autre des deux égalités suivantes*:

$$\begin{aligned}(q_n+1)\cdot\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_{n-1}, q_n+1)\\ = -\alpha\cdot\lambda(\alpha, \beta+1; 1, q_1, ..., q_n) - \beta\cdot\lambda(\alpha+1, \beta; 1, q_1, ..., q_n)\\ - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1}\ \sum_{q'_k + q''_k = q_k} \lambda(\alpha+1, \beta+1; 1, q_1, ..., q'_k, q''_k, ..., q_n).\end{aligned} \tag{32a}$$

$$\begin{aligned}(q_n+1)\cdot\lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_{n-1}, q_n+1)\\ = \lambda(\alpha, \beta+1; 1, q_1, ..., q_n) + \lambda(\alpha+1, \beta; 1, q_1, ..., q_n)\\ + \sum_{q'_n + q''_n = q_n} \lambda(\alpha+1, \beta+1; 1, q_1, ..., q_{n-1}, q'_n, q''_n).\end{aligned} \tag{32b}$$

Je précise que si $q_k = 1$, la somme sur les (q'_k, q''_k) tels que $q'_k + q''_k = q_k$, doit être comprise comme valant 0.

Première démonstration. Choisissons une permutation $(i_1, ..., i_n)$ des n premiers entiers > 0, telle que α et β soient les nombres de montées et de descentes; choisissons n indéterminées distinctes $a_1, ..., a_n$ parmi celles qui engendrent A (donc ici $m = n$); la suite $(p_1, ..., p_n)$ est déterminée ici par la condition exceptionnelle que voici: les monômes commutatifs associés à a^p et $a_i^q a_{i_n}$ doivent être égaux; ils sont de degré $q_n + 1$ par rapport à a_{i_n}. Pour que $L(a^p/p!)$ soit dans A, il faut (et il suffit) que

$$C \circ L(a^p/p!) = L(a^p/p!) \otimes 1 + 1 \otimes L(a^p/p!);$$

ceci implique que $C \circ L(a^p/p!)$ a une composante nulle selon $a_i^q \otimes a_{i_n}$; dans l'expression de $L(a^p/p!)$ développée selon la formule (31), cherchons quels sont les monômes dont l'image par C peut avoir une composante non nulle selon $a_i^q \otimes a_{i_n}$. Il y a d'abord le monôme où figure $a_i^q a_{i_n}$; son image par C fournit la composante

$$(q_n + 1) \cdot \lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_{n-1}, q_n + 1).$$

Il y a ensuite les monômes du type suivant:

$$a_{i_1}^{q_1} \cdots a_{i_{k-1}}^{q_{k-1}} a_{i_n} a_{i_k}^{q_k} \cdots a_{i_n}^{q_n} \qquad (\text{avec } 1 \leqslant k \leqslant n-1);$$

ils fournissent une composante égale à

$$\lambda(\alpha + 1, \beta; 1, q_1, ..., q_n) \qquad \text{ou} \qquad \lambda(\alpha, \beta + 1; 1, q_1, ..., q_n);$$

soit μ (resp. ν) le nombre de fois qu'on obtient le premier (resp. le second) de ces deux coefficients; $\alpha + \mu$ (resp. $\beta + \nu$) est donc égal au nombre de montées (resp. descentes) dans la suite (de longueur $2n - 1$)

$$(i_n, i_1, i_n, i_2, i_n, i_3, \dots \dots, i_n, i_{n-1}, i_n);$$

or il y a dans cette suite autant de montées que de descentes; donc $\mu = \beta$ et $\nu = \alpha$. Enfin il y a les monômes du type

$$a_{i_1}^{q_1}, ..., a_{i_k}^{q'_k} a_{i_n} a_{i_k}^{q''_k}, ..., a_{i_n}^{q_n}$$

avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $q'_k + q''_k = q_k$ (ce qui n'est possible que si $q_k \geqslant 2$); ils fournissent les coefficients

$$\lambda(\alpha + 1, \beta + 1; 1, q_1, ..., q'_k, q''_k, ..., q_n).$$

On obtient l'égalité (32a) en écrivant que la somme de toutes ces composantes selon $a_i^q \otimes a_{i_n}$ est nulle.

Soit maintenant a_{n+1} une indéterminée distincte des précédentes (donc $m=n+1$); définissons maintenant le monôme a^p par la condition que les monômes commutatifs associés à a^p et $a_l^q a_{n+1}$ soient égaux, et utilisons l'hypothèse que $L(a^p/p!)$ est dans A; ceci implique la nullité de la composante de $C \circ L(a^p/p!)$ selon $a_l^q \otimes a_{n+1}$; en calculant cette composante par la méthode expliquée ci-dessus, on aboutit à l'égalité

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha+1)\cdot\lambda(\alpha, \beta+1; 1, q_1, ..., q_n) \\ &\quad + (\beta+1)\cdot\lambda(\alpha+1, \beta; 1, q_1, ..., q_n) \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{q'_k + q''_k = q_k} \lambda(\alpha+1, \beta+1; 1, q_1, ..., q'_k, q''_k, ..., q_n). \end{aligned} \tag{32c}$$

Maintenant (32b) résulte de (32a) et (32c).

Seconde démonstration. On part de l'hypothèse que les coefficients λ proviennent d'une fonction $F(u, x)$, comme l'explique le théorème (6), et que cette fonction F satisfait les deux équations aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}(u(u-1)F) + 1, \tag{33a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = F^2; \tag{33b}$$

la première équation est identique à l'équation (9) qui m'a permis de calculer F au § 5, et il est immédiat que cette fonction F vérifie aussi (33b). En combinant (33a) et (33b) on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (2u-1)F + u(u-1)F^2 + 1;$$

par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_n}\int_0^1 u^\alpha(u-1)^\beta F(u, x_1)\cdots F(u, x_n)\,du \\ &\quad = \int_0^1 (u^{\alpha+1}(u-1)^\beta + u^\alpha(u-1)^{\beta+1})\cdot F(u, x_1)\cdots F(u, x_n)\,du \\ &\quad\quad + \int_0^1 u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1} F(u, x_1)\cdots F(u, x_{n-1})F(u, x_n)^2\,du \\ &\quad\quad + \int_0^1 u^\alpha(u-1)^\beta F(u, x_1)\cdots F(u, x_{n-1})\,du; \end{aligned}$$

en cherchant dans cette égalité les monômes en $x_1^{q_1} x_2^{q_2}, ..., x_n^{q_n}$, on trouve (32b). Pour démontrer l'égalité (32c) écrite plus haut, on part de l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} (u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1} F(u, x_1) \cdots F(u, x_n))\, du = 0;$$

on utilise n fois l'égalité (33b), et on procède comme ci-dessus pour obtenir (32c). Enfin (32a) résulte de (32b) et (32c).

(34) PROPOSITION. *Les deux égalités* (32a, b) *impliquent que les coefficients de complexité nulle*

$$\lambda(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta; 1, 1, 1, ..., 1)$$

satisfont les égalités

$$(\alpha+1) \cdot \lambda(\alpha, \beta+1) + (\beta+1) \cdot \lambda(\alpha+1, \beta) = 0; \tag{34a}$$

elles permettent de calculer tous les coefficients λ modulo un facteur qui ne dépend que de leur degré, et elles constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $L(UA) \subset A$. Si en outre l'égalité (31) *est vraie pour tout monôme $a_1 a_2, ..., a_m$, où tous les facteurs sont choisis parmi les générateurs de A, sauf a_m qui est un crochet de deux générateurs, alors on a aussi*

$$\lambda(\alpha+1, \beta) - \lambda(\alpha, \beta+1) = \lambda(\alpha, \beta); \tag{34b}$$

les égalités (34a, b) *déterminent les coefficients $\lambda(\alpha, \beta)$ à partir de la donnée de $\lambda(0, 0)$.*

Démonstration. L'égalité (34a) est un cas particulier de (32c), lorsque $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 1$. Manifestement les égalités (34a) permettent de calculer les coefficients $\lambda(\alpha, \beta)$ modulo un facteur qui ne dépend que de leur degré $\alpha + \beta + 1$; donc les égalités (32a, b) déterminent tous les coefficients λ modulo un facteur dépendant de leur degré. Et puisque la condition $L(UA) \subset A$ ne peut pas faire mieux que de les déterminer modulo un tel facteur, les égalités (32a, b) constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $L(UA) \subset A$. Passons à la démonstration de (34b). Considérons le monôme $a_1, a_2, ..., a_m$, avec $a_m = [b, c]$ et $m \geqslant 1$, lorsque $a_1, a_2, ..., a_{m-1}, b, c$ sont des éléments distincts dans l'ensemble des générateurs de A. Utilisons trois fois l'égalité (31) pour développer l'expression suivante, qui doit être nulle:

$$L(a_1 \cdots a_{m-1} a_m) - L(a_1 \cdots a_{m-1} bc) + L(a_1 \cdots a_{m-1} cb).$$

Dans le développement de $L(a_1 \cdots a_m)$, prenons un monôme avec α montées et β descentes, donc avec le coefficient $\lambda(\alpha, \beta)$; remplaçons a_m par $bc - cb$, ce qui donne deux nouveaux monômes; considérons le premier, celui qui contient bc, et cherchons quels sont les autres monômes du même type; dans $L(a_1 \cdots a_{m-1} bc)$ nous trouvons un monôme du même type avec le coefficient $\lambda(\alpha + 1, \beta)$; dans $L(a_1 \cdots a_{m-1} cb)$ il a le coefficient $\lambda(\alpha, \beta + 1)$; nous obtenons ainsi l'égalité (34b). Et ceci termine la démonstration de (34).

Je signale que (34b) est un cas particulier de l'égalité suivante

$$\lambda(\alpha + 1, \beta; 1, q_1, ..., q_n) - \lambda(\alpha, \beta + 1; 1, q_1, ..., q_n) = \lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n),$$

qui est une conséquence facile du théorème (6), puisque

$$uF_1(u) - (u-1)\, F_1(u) = 1.$$

On peut aussi utiliser les égalités (32a) et (32b) pour un autre but que celui que j'ai annoncé. Par exemple, on peut déduire de (32a) que $\lambda(0, 0; q) = 0$ si $q \geqslant 2$, ainsi que je l'ai déjà expliqué au § 1 (voir (10)). Je vais montrer qu'avec les relations (11a, b) et (32a, b) on peut retrouver rapidement la valeur de quelques coefficients déjà connus, sans utiliser les laborieuses formules (30a, b, d); il s'agit de démontrer que

$$\lambda(0, 1; 1, q) = B_q/q! \tag{35a}$$

$$\lambda(1, 0; 1, p) = (-1)^p\, B_p/p! \tag{35b}$$

$$\lambda(1, 1; 1, p, q) = (-1)^p\, B_{p+q}/p!\, q!. \tag{35c}$$

Les égalités (35a, b) figurent déjà au § 1 comme conséquences de (11a, b) et (10); il ne reste plus qu'à démontrer (35c). D'une part, nous déduisons de (32a) que

$$(q+1) \cdot \lambda(0, 1; 1, q+1) = -\lambda(1, 1; 1, 1, q)$$

$$(p+1) \cdot \lambda(1, 0; 1, p+1) = -\lambda(1, 1; 1, p, 1);$$

d'autre part, calculons $(q+1) \cdot \lambda(1, 1; 1, p, q+1)$ grâce à (32a), puis $(p+1) \cdot \lambda(1, 1; 1, q, p+1)$ grâce à (32b); nous constatons que

$$(q+1) \cdot \lambda(1, 1; 1, p, q+1) = -(p+1) \cdot \lambda(1, 1; 1, p+1, q);$$

ces égalités permettent de déduire (35c) de (35a) ou (35b).

Pour m'assurer que les relations (32a, b) permettent de calculer confortablement les coefficients λ par récurrence à partir de ceux de complexité nulle, j'ai procédé au calcul de tous les coefficients λ de degré $\|q\| \leqslant 7$; ce calcul se fait degré par degré, parce que dans (32a, b) tous les coefficients λ ont le même degré. En fait, j'ai d'abord calculé les nombres entiers

$$\mu(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n) = (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)!\, q_1!\, q_2!, ..., q_n!\, \lambda(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n).$$

Le calcul de ces nombres entiers μ se fait grâce aux relations de récurrence

$$\begin{aligned} &\mu(\alpha, \beta; q_1, ..., q_{n-1}, q_n + 1) \\ &\quad = -\alpha \cdot \mu(\alpha, \beta + 1; 1, q_1, ..., q_n) - \beta \cdot \mu(\alpha + 1, \beta; 1, q_1, ..., q_n) \\ &\quad\quad - \sum_{k \neq n} \sum_{q'_k + q''_k = q_k} \frac{q_k!}{q'_k!\, q''_k!} \mu(\alpha + 1, \beta + 1; 1, ..., q'_k, q''_k, ..., q_n) \end{aligned} \tag{36a}$$

$$\begin{aligned} &\mu(\alpha, \beta; q_1, ..., q_{n-1}, q_n + 1) \\ &\quad = \mu(\alpha, \beta + 1; 1, q_1, ..., q_n) + \mu(\alpha + 1, \beta; 1, q_1, ..., q_n) \\ &\quad\quad + \sum_{q'_n + q''_n = q_n} \frac{q_n!}{q'_n!\, q''_n!} \mu(\alpha + 1, \beta + 1; 1, q_1, ..., q'_n, q''_n). \end{aligned} \tag{36b}$$

On utile (36b) si dans la suite $(q_1, ..., q_{n-1}, q_n + 1)$ l'exposant $q_n + 1$ est minimal parmi ceux qui sont $\geqslant 2$; si $q_n + 1 = 2$, il n'y a pas à hésiter. On utilise (36a) si $q_n + 1$ est maximal dans cette suite d'exposants; si tous les autres valent 1, il n'y a pas à hésiter. Dans le tableau ci-joint, je donne la liste des coefficients λ et μ lorsque $\alpha \geqslant \beta$ et lorsque $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant q_n$; utilisez la symétrie (4) pour les coefficients λ tels que $\alpha < \beta$. Les coefficients λ sont rangés par degrés croissants, et pour un degré donné, ils sont rangés par complexités croissantes. Pour économiser la place, je n'ai écrit que les trois premiers exposants q_1, q_2, q_3; les suivants (si il y en a) sont toujours égaux à 1; on retrouve les exposants non écrits, sachant qu'il y a $(\alpha + \beta + 1)$ exposants en tout, ou que leur somme est $\|q\|$.

J'aurais aussi pu utiliser la relation de récurrence suivante, qui est une conséquence de (6) et (8b):

$$\mu(\alpha, \beta; q_1, ..., q_n) = \sum_{\gamma + \delta = q_n - 1} N(\gamma, \delta) \cdot \mu(\alpha + \gamma, \beta + \delta; q_1, ..., q_{n-1}, 1, ..., 1);$$

tout comme (36a, b), elle ne fait intervenir que des coefficients μ de même degré, mais elle exige la connaissance des nombres eulériens $N(\gamma, \delta)$. Evidemment, à partir de (6) et (8a) on pourrait établir une nouvelle relation de récurrence, qui ferait intervenir les nombres de Stirling; mais tout comme (11a, b), elle mélangerait des coefficients de degrés différents.

TABLEAU I

$\|q\|$	α	β	q_1	q_2	q_3	μ	λ
1	0	0	1			1	1
2	1	0	1	1		1	1/2
	0	0	2			0	0
3	2	0	1	1	1	2	1/3
	1	1	1	1	1	−1	−1/6
	1	0	2	1		1	1/12
	0	0	3			0	0
4	3	0	1	1	1	6	1/4
	2	1	1	1	1	−2	−1/12
	2	0	2	1	1	4	1/12
	1	1	2	1	1	0	0
	1	0	3	1		0	0
			2	2		4	1/24
	0	0	4			0	0
5	4	0	1	1	1	24	1/5
	3	1	1	1	1	−6	−1/20
	2	2	1	1	1	4	1/30
	3	0	2	1	1	18	3/40
	2	1	2	1	1	−2	−1/120
	2	0	3	1	1	4	1/180
			2	2	1	16	1/30
	1	1	3	1	1	4	1/180
			2	2	1	−4	−1/120
	1	0	4	1		−4	−1/720
			3	2		8	1/180
	0	0	5			0	0
6	5	0	1	1	1	120	1/6
	4	1	1	1	1	−24	−1/30
	3	2	1	1	1	12	1/60
	4	0	2	1	1	96	1/15
	3	1	2	1	1	−12	−1/120
	2	2	2	1	1	0	0
	3	0	3	1	1	36	1/120
			2	2	1	84	7/80
	2	1	3	1	1	12	1/360
			2	2	1	−12	−1/80
	2	0	4	1	1	−24	−1/720
			3	2	1	48	1/180
			2	2	2	72	1/80
	1	1	4	1	1	0	0
			3	2	1	0	0
			2	2	2	0	0
	1	0	5	1		0	0
			4	2		−24	−1/1440
			3	3		72	1/360
	0	0	6			0	0
7	6	0	1	1	1	720	1/7
	5	1	1	1	1	−120	−1/42
	4	2	1	1	1	48	1/105
	3	3	1	1	1	−36	−1/140
	5	0	2	1	1	600	5/84
	4	1	2	1	1	−72	−1/140
	3	2	2	1	1	12	1/840
	4	0	3	1	1	288	1/105
			2	2	1	528	11/420
	3	1	3	1	1	36	1/840
			2	2	1	−60	−1/336
	2	2	3	1	1	−48	−1/630
			2	2	1	24	1/840
	3	0	4	1	1	−108	−1/1120
			3	2	1	324	3/560
			2	2	2	468	13/1120
	2	1	4	1	1	60	1/2016
			3	2	1	−12	−1/5040
			2	2	2	−36	−1/1120
	2	0	5	1	1	−120	−1/5040
			4	2	1	−48	−1/5040
			3	3	1	384	2/945
			3	2	2	312	13/5040
	1	1	5	1	1	−120	−1/5040
			4	2	1	120	1/2016
			3	3	1	−120	−1/1512
			3	2	2	−24	−1/5040
	1	0	6	1		120	1/30240
			5	2		−240	−1/5040
			4	3		192	1/3780
	0	0	7			0	0

RÉFÉRENCES

[B] BOURBAKI, "Groupes et algèbres de Lie," Chap. II, "Algèbres de Lie libres," Hermann, Paris, 1972.

[C] L. COMTET, "Analyse combinatoire," 2 Tomes, Chap. I, § 14, Chap. VI, § 5, Presses Universitaires de France, 1970.

[D] J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[F, S] D. FOATA ET M. P. SCHUTZENBERGER, "Théorie géométrique des polynômes eulériens," Lecture Notes, Springer, 1970.

[G] R. GOODMANN, Differential operators of infinite order on a Lie group, II, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (5) (1971), 383–409.

[I] F. MOHAMED ISMAIL, "Exponentielle et groupes de Lie gradués," Thèse soutenue le 20.12.1982 à l'Université de Grenoble, 1982.

[J] N. JACOBSON, "Lie algebras," Wiley–Interscience, New York, 1962.

[M, M] J. W. MILNOR ET J. C. MOORE, On the structure of Hopf algebras, *Ann. Math.* **81** (1965), 211–264.

[R] J. RIORDAN, "An introduction to combinatorial analysis," Wiley, New York, 1958.

[S] L. SOLOMON, On the Poincaré–Birkhoff–Witt theorem, *J. Combin. Theory* **4** (1968), 363–375.